서울교육대학교 韓國初等教育 제31권 제1호
The Journal of Korea Elementary Education
Vol. 31, No. 1, 173-190 March 2020

DOI http://dx.doi.org/10.20972/Kjee.31.1.202003.173

구체적 교수법과 추상적 교수법을 결합한 두 자리 수 곱셈 문제 해결 전략 지도

임수현*

〈 요 약 〉

사람들은 학교에서 익숙히 배운 계산법 및 문제별 특징에 알맞게 고안된 유연하고 적합한 풀이 전략 등을 활용하여 여러 자리 수 곱셈 문제를 해결한다. 이 중 분배 법칙을 활용하여 곱하는 수를 재구성하여 여러 자리 수 곱셈 문제를 해결하는 것은 매우 효과적이고 편리한 문제 해결 전략이다(예: $12 \times 17 = 12 \times (10 + 7) = 120 + 84 = 204$). 본 연구에서는 구체적 교수법과 추상적 교수법을 결합한 교수 방법이 분배 법칙을 활용한 곱셈 문제 해결 전략을 지도하는 데 얼마나 효과적인지 비교 분석하였다. 이를 위하여 서울 남부의 2개의 초등학교에서 참가자를 모집하였으며, 참가에 동의한 3학년 학생들은 4개의 실험 집단으로 임의 배정되었다. 각 실험 집단에 속한 참가 학생들은 구체적 교수법 (연산 감각 기반 또는 넓이 기반) 과 추상적 교수법 (방정식 기반) 의 두 개의 교수 모듈이 결합된 워크북을 구체적 교수법 선행(연산 감각 기반-방정식 기반 또는 넓이 기반-방정식 기반 순서) 또는 추상적 교수법 선행 (방정식 기반-연산 감각 기반 또는 방정식 기반-넓이 기반 순서) 의 순으로 완성하였다. 연구 결과 교수법 순서에 따른 곱셈 문제 해결 능력 향상에는 차이가 없는 것으로 나타났다. 하지만 연산 감각에 기반한 구체적 교수법의 경우 넓이에 기반한 구체적 교수법보다 훨씬 더 두 자리 수 곱셈 문제 해결 능력을 향상시키는 것으로 나타났다. 다른 유형의 복잡한 곱셈 문제 해결 능력(예: 방정식 형태의 곱셈 문제)과 관련된 학습 효과의 전이 측면에서는 모든 교수 방법에서 비슷한 효과를 보였다. 마지막으로 개인별 한 자리 수 덧셈 뺄셈 연산 유창성의 경우 분배 법칙을 활용한 곱셈 문제 해결 전략 학습 정도를 예측하는 데 유의한 변인인 것으로 나타났다. 교육적 함의 및 제언으로서는 효과적인 교수 학습 지도 이론 및 연산 문제 풀이 해결 전략 방법에 대해 논의하였다.

주제어: 곱셈 지도 연구, 분배 법칙, 구체적 교수법 선행, 추상적 교수법 선행

* Teachers College, Columbia University, 박사후연구원, si2345@tc.columbia.edu

Ⅰ. 서론

사칙연산 능력은 수학적 사고의 근간으로 수학 학업 성취를 예측하는 매우 중요한 변인이다(강완 외, 2014; 임미인, 장혜원, 2017; Fuchs, Geary, Fuchs, Compton, & Hamlett, 2014; Jordan, Kaplan, Ramineni, & Locuniak, 2009). 기존의 선행 연구들은 사람들이 어떻게 한 자리 수 연산 문제를 풀이하는지에 집중해 왔다 (Campbell& Graham, 1985; Lefevre et al., 1996). 이에 반해 상대적으로 사람들이 여러 자리 수 연산 문제를 어떻게 풀이하는 지에 대해 상대적으로 연구가 미미한 편이었다(Carpenter, Franke, Jacobs, Fenneman, & Empson, 1998; Hikendorff, Torbyens, &Verschaffel, 2019; Lemaire & Callies, 2009). 이러한 적은 수의 선행 연구들 가운데에서도, 대부분은 학습자가 정형화된 계산 절차를 익히고 습득하는 데에만 관심을 둔 것이 사실이다. 이에 반해 학습자가 자신의 개념적 지식을 바탕으로 복잡하고 새로운 연산 문제를 어떻게 효과적으로 해결하는 지에 대해서는 연구가 부족한 편이었다(Hikendorff, Torbyens, & Verschaffel, 2019; Kilpatrick, Swafford, & Findell, 2001; NCTM, 2006). 이는 아동의 사칙연산 능력을 깊이 이해하고 연구하는 데 있어 중대한 손실로 볼 수 있다. 따라서 연산 영역과 관련하여 연구자들은 아동이 여러 자리 수 문제들을 어떤 다양한 전략으로 해결하는 지에 대해 보다 활발한 연구를 할 필요가 있다. 또한 교수 학습 지도 측면에서 어떻게 다양한 문제 풀이 전략을 효과적으로 지도할 것인지 고민이 필요하다.

1. 유연하고 적합한 전략과 여러 자리 수 연산

사람들은 정형화된 계산 절차와 유연하고 적합한 전략들을 결합하여 여러 자리 수 연산 문제를 해결한다. 유연하고 적합한 전략(adaptive strategies)은 개념적 이해를 토대로 복잡한 연산 문제를 보다 간결한 형태의 문제로 변경 가능하게 하여 학습자들이 손쉽게 자신이 숙지하고 있는 곱셈 구구(예: 8 × 7 = 56)와 올림 및 내림과 같은 연산 절차들을 활용해서 답을 구할 있도록 도와준다(Baroody, 2003; Carpenter et al., 1998; Prather & Alibali, 2009; Verschaffel, Luwel, Torbeyns, & Van Dooren, 2009). 개념적 이해에 바탕한 지식은 유연하고 적합한 전략을 개발하는 데 있어 여러 가지로 유의미하게 활용된다. 먼저 자리 수 이해에 대한 지식은 큰 여러 자리 수들을 보다 쉽게 다룰 수 있는 작은 수들의 합으로 변형할 수 있게 도와준다. 예를 들어 자리 수 개념이 있는 아동의 경우 13이라는 숫자를 10 + 3 으로 재구성할 수 있다. 사칙연산 개념에 대한 이해는 결합, 교환, 항등, 역연산 법칙들을 활용하여 연산 문제를 풀이하기 쉽게 변형하는 데 도움을 준다. 특별히 이러한 사칙연산 개념에 대한 이해는 추후 학습하게 될 방정식을 익히는 데 매우 중요한 근간으로서, 사칙연산 개념에 대한 이해 부족은 추후 방정식을 익히고 배우는 데 있어 어려움을 초래하기도 한다(장혜원, 2017; Herscovics, & Linchevski, 1994).

본 연구에서는 여러 가지 유연하고 적합한 전략 중에 두 자리 수 곱셈 문제를 풀이하는 데 효과적으로 활용될 수 있는 분배 법칙에 관심을 두고 아동들에게 어떻게 효과적으로 지도할 수 있는 지에 대해 탐색해 보았다. 예를 들어 12 × 17 문제에 대해 생각해 보자. 대부분의 사람들은 암기된 곱셈 구구를 바탕으로 학교에서 익히고 배운 정형화된 계산 절차에 따라 문제를 풀 것이다. 하지만 또 어떤 사람의 경우는 아래와 같이 유연하고 적합한 전략을 사용해서 문제를 풀 수도 있을 것이다.

12 × 17	= 12 × (10 + 7)	(1) 자리 수 개념을 활용을 통한 작은 수로 분해
	= (12 × 10) + (12 × 7)	(2) 분배법칙 활용을 통한 연산식의 재구성
	= 120 + 84	(3) 암기된 곱셈 구구 소환 또는 직접적 계산
	= 204	(4) 최종 계산 결과 도출

이상의 분배 법칙을 활용한 유연하고 적합한 문제 풀이 해결 전략의 효과성은 문제 풀이의 정확성과 신속성을 조사한 연구에서 확인이 된다. 한 연구 결과에 따르면 4학년 학생들의 경우 25 × (10 + 2) 와 같이 분배 형태로 제시된 두 자리 수 곱셈 문제를 25 × 12와 같이 정형화 된 형태로 제시된 두 자리 수 곱셈 문제보다 빠르고 정확하게 풀이하는 것으로 나타났다(Liu, Ding, Gao, & Zhang, 2015).

2. 구체적 교수법 및 추상적 교수법

분배 법칙을 가르치기 위해 다양한 교수 방법들이 논의되어 왔다(김주창, 이광호, 2019; 정영옥, 2013; Davis & Simmt, 2006; Lee, 2014). 본 연구에서는 이러한 다양한 방법 중 연산 감각(arithmetic), 넓이(area), 방정식(algebra) 기반으로 한 교수 방법에 연구의 초점을 두었다(Baroody, 2003; Carpenter et al., 1998; Prather & Alibali, 2009; Verschaffel et al., 2009).

이 세 가지 교수 방법은 구체적 교수법 또는 추상적 교수법의 특성을 지니고 있으며, 특별히 구체적 교수법과 추상적 교수법을 접목한 교수 접근법의 경우 수학에 어려움을 겪는 아동들을 지도하는 데 효과적인 것으로 선행 연구에서 논의되어 왔다(임영빈, 홍진곤, 2016; 황리리, 신현기, 2008; Witzel, Mercer, & Miller, 2003). 그 대표적인 예로 CRA(Concrete-Representational-Abstract) 교수 접근법의 경우, 구체물 조작 활동에 바탕한 구체적(concrete) 교수법, 구체물을 그림으로 나타내는 활동에 바탕한 표상적 (representational) 교수법, 숫자 및 기호 등을 형식화하는 활동에 바탕한 추상적(abstract) 교수법을 순차적으로 제공함으로써 아동이 추상적이고 복잡한 수학적 개념을 쉽게 이해하는데 도움을 제공한다(Witzel et al., 2003). 본 연구에서는 이에 착안하여 구체적 교수법과 추상적 교수법의 결합을 통해서 두 자리 수 곱셈 연산에서 적용할 수 있는 분배 법칙 개념을 지도하는 데 적용해 보았다. 각 교수 방법의 구체적 특징을 기술하기 전에 일반적인 속성에 대해 먼저 살펴보겠다.

연산 감각 및 넓이를 기반으로 한 교수 방법들은 구체적 교수법의 지도 성격을 가진다. 이 두 가지 교수 방법은 아동들에게 친숙한 내용과 매개체를 가지고 분배 법칙 활용법을 지도한다. 연산 감각 기반 교수 방법의 경우, 아동들이 익히 숙지하고 있는 한 자리 수 산술 지식(arithmetic facts)을 적극 활용한다. 넓이 기반 교수 방법의 경우 학습을 위한 효과적인 매개체로 모눈 종이를 적극 활용한다. 또한 이 두 가지 교수 방법은 연산 절차를 익히고 안내하는 데에 있어 아동의 지각 운동 기능(perceptual-motor system)을 활용하여 부분곱의 값과 이 결과물들이 어떻게 더해지는 것인지 간접적으로 형상화한다. 이 두 가지 구체적 교수 방법 중에 어떤 교수 방법이 더 효과적인 학습 및 전이(learning and transfer)를 가져올 수 있는 지는 연구해 볼 가치가 있는 매우 흥미로운 질문이며, 이 질문의 경우 아래에서 구체적으로 논의하고자 한다.

방정식을 기반으로 하는 교수 방법의 경우 누구나 예상할 수 있듯이 추상적 교수법의 지도 성격을 가진다. 방정식을 기반으로 한 교수 방법의 경우 분배 법칙을 다음과 같은 항등식을 활용하여 문제 풀이 절차를 직접적으로 형상화 한다, $x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z)$. 이는 분배 법칙 과정을 간접적으로 형상화 한 연산 감각 및 넓이 기반 교수 방법과는 차이를 가진다. 아동들은 주어진 수식의 왼편과 오른편을 비교하여 일정한 규칙을 찾아낸 후 각각의 분배된 수를 곱하여 최종적인 계산 값을 도출함으로써 분배법칙을 어떻게 활용할 수 있는지 익히게 되는 것이다.

다음으로 각 교수 방법의 구체적 특징으로는 연산 감각 기반 교수 방법은 덧셈과 뺄셈에 대한 사전 지식을 기반으로 곱셈 문제를 해결할 수 있도록 지도하는 방법이다. 아동들은 곱셈이 덧셈의 반복(예: 9 × 3 = 9 + 9 + 9) 이라는 의미체계를 바탕으로 개념을 형성하고 곱셈 부호 '×'의 뜻을 이해하게 된다. 넓이 기반 교수 방법은 초등학생의 곱셈 지도 시에 널리 사용되는 여러 가지 시각적 모델 중의 하나이다(Cooney, Swanson, & Ladd, 1988; Lee, 2014). 기존 선행 연구에서는 이를 배열 모델로 지칭하기도 하였다(김주창, 이광호,

2019; 정영옥, 2013). 넓이 기반 교수 방법은 아동의 시공간 능력과 지각 운동 기능을 기반으로 곱셈에 대한 의미 체계를 형성할 수 있도록 지도하는 방법이다. 즉 주어진 곱셈 문제를 모눈 종이에 외면적으로 표상화하여 모눈 종이에 표시된 사각형 영역 안의 네모 난 도형들의 개수를 셈으로써 넓이를 파악하게 한다. 방정식 기반 교수 방법은 분배 법칙을 직접적으로 형상화해서 여러 자리 수의 곱셈 문제를 두 곱셈식의 합으로 재구성해서 문제를 해결할 수 있도록 지도하는 방법이다. 이는 추후 아동들이 배우게 될 방정식 개념을 숫자와 화살표 등을 활용해 초등학생들도 쉽게 이해할 수 있도록 하는 접근법이다.

이상에서 살펴본 구체적 교수법 및 추상적 교수법은 서로 상호 보완할 수 있는 장단점을 가지고 있다(예: Uttal, Scudder, & DeLoache, 1997). 이는 기존의 두 교수법의 효과를 비교 분석하는 선행 연구에서 혼재되는 결과들이 나타나는 이유이기도 하다(예: McNeil, Uttal, Jarvin, & Sternberg, 2009). 구체적 교수법의 장점은 학습자의 사전 지식과 지각 운동 능력을 기반으로 하는 데 있다. 이에 반해 단점은 각 단계별 절차가 매우 특정화 되어 있어 일반화하기에 어려움이 따르는 점이다. 예를 들어 연산 감각 기반 교수 방법의 경우 분수처럼 십진법의 자리 수 개념이 적용되지 않는 수의 경우 사용하기에 제한이 따른다. 넓이 기반 교수 방법의 경우 78 × 89와 같이 매우 큰 두 수의 곱 또는 세 자리 수의 곱셈을 지도하는 데에 많은 어려움이 따른다. 또한 넓이 기반 교수 방법의 경우 공간 감각과 같은 직관이 추가적으로 요구되는 데 일부 아동들은 이러한 의미 체계를 가지고 있을 수도 있겠으나 대부분의 아동들은 그렇지 않을 수 있다. 또한 넓이 기반 교수 방법은 비형식화된 의미 모델(informal semantic model)과 방정식의 형식화된 표기법(formal notation of algebra)을 연계하고 이해하는 데 있어 인지적 부담을 추가적으로 초래하기도 한다(McNeil et al., 2009).

이에 반해 추상적 접근법의 장점으로는 방정식의 형식화된 표기법을 학습자에게 직접적으로 지도할 수 있게 만든다는 점이다(Kaminski, Sloutsky, & Heckler, 2008). 형식화된 수학적 표기법은 방정식 교수법의 중요한 주춧돌이 된다(Kaminski, Sloutsky, & Heckler, 2009). 형식화된 수학적 표기법은 자연수, 분수와 상관없이 어떤 수에도 동일하게 적용할 수 있으며 수의 크기에 상관없이 일반화해서 사용할 수 있다. 하지만 추상적 접근법의 경우도 단점이 없는 것은 아니다. 먼저 방정식에서 미지수 개념은 아직 추상적 사고를 할 수 있는 능력이 충분히 계발되어 있지 않는 어린 학습자에게는 여전히 어려운 과제이다(Linchevski & Herscovics, 1996). 또한 방정식 표기법은 다방면의 수학적 지식을 요구하며, 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈의 여러 연산 기호 중 어떤 연산 식을 먼저 처리해야 하는 지에 대한 추가적인 지식도 요구하게 된다.

3. 구체적 교수법과 추상적 교수법의 결합

구체적 교수법 및 추상적 교수법의 서로 상충되는 장단점을 고려할 때 만약 이 두 가지 교수법을 결합한다면 아동의 학습과 전이에 어떠한 결과를 가져올 지에 대해 반문해 볼 수 있다. 이 의문에 대한 첫 번째 답은 Bruner(1966)를 통해서 찾을 수 있다. 그의 이론적 설명에 따르면 교수 학습은 항상 개념에 대한 구체적인 예시를 언급함으로써 시작해야 하며, 이러한 구체적인 예시들을 비교 검증함으로써 공통의 특징들을 발견할 수 있도록 장려되어야 한다고 논하였다. 그리고 난 후 추후에 추상적 개념을 소개해야 한다고 강조하였다. 특별히 Bruner의 “시기상조의 상징화(premature symbolization)”에 대한 부정적인 견해는 매우 통찰력이 있는 식견으로 볼 수 있다. 실제 Schwartz와 Bransford(1998; Bransford & Schwartz, 1999)도 교수 접근법의 순서 측면에서 비슷한 견해를 제시하였다. 그들은 “적합한 교수법의 시점(time for telling)”을 제시하며 학습 내용에 대한 추상적 핵심 개념은 학습자가 제시된 학습 내용의 복잡성과 다양한 예제들을 충분히 경험한 이후에 지도할 것을 제안하였다. 이러한 교수 접근법의 순서를 점진적 형성화(progressive formalization)라고 명명하기도 한다(Goldstone & Son, 2005). 최근에는 구체적 교수법 선행(concreteness fading)이라는 용어가 더 널리 사용되고 있기도 하다(Fyfe, McNeil, Son, & Goldstone, 2014; Fyfe & Nathan, 2019).

본 연구에서는 구체적 교수법 선행이라는 용어를 채택하였다. 선행 연구들을 살펴보면 구체적 교수법에서 점차적으로 추상적 교수법으로 변화하는 순서를 지닌 구체적 교수법 선행 순서가 아동의 수학 학습에 더 도움이 되는 것으로 확인되기도 한다(예: McNeil & Fyfe, 2012).

또 다른 연구자들은 먼저 추상적 접근법을 통한 상징적 기호를 익힌 이후 이를 실제적이고 복잡한 문제에 적용하는 순서를 옹호하기도 하였다. 이와 같이 추상적 교수법에서 구체적 교수법으로 점차적으로 변화하는 교수법을 본 연구에서는 추상적 교수법 선행(abstraction instantiation)으로 명명하였다. 특별히 추상적 교수법 선행 순서는 그 효과에 대한 의문이 있음에도 불구하고(Nathan,2012), 수학 교과서의 방정식 단원에서 널리 채택되고 있는 지도 접근법이기도 하다(Sherman, Walkington, & Howell, 2016).

기존의 선행 연구에서는 추상적 교수법 선행보다는 구체적 교수법 선행의 우월성을 옹호하는 논의들이 그 동안 많이 이루어졌다. 일반적으로 구체적 교수법 선행 순서는 지도하고자 하는 학습 내용의 습득과 관련된 학습 내용의 전이에 보다 효과적인 것으로 확인되었다. 구체적으로 살펴보면 수학적 등호의 개념 지도(Fyfe,McNeil, & Borjas, 2015), 덧셈과 뺄셈의 역연산 관계에 대한 지도(Ching & Wu, 2019), 더 나아가 복잡한 방정식 및 순열(Braithwaite & Goldstone, 2013)을 지도하는 데에 있어서 구체적 교수법 선행의 순서가 효과적임을 확인할 수 있었다. 그러나 또 다른 방면의 연구에서는 추상적 교수법 선행의 우월성을 보여주는 연구 결과들을 보여주기도 하였다. 예를 들어 전기회로에 흐르는 전류의 양을 수학적으로 계산하는 경우 추상적 교수법이 학습 내용의 개념 습득에 더 도움이 되는 것으로 나타나기도 하였다(Johnson, Reisslein, & Reisslein, 2014). 특별히 Kaminski et al.(2008)은 추상적 교수법 선행의 경우 구체적 교수법 선행과는 달리 부수적이고 불필요한 지각적 정보를 제거함으로써 핵심 학습 개념 이해 및 전이에 더 효과적일 수 있음을 지적하기도 하였다. 따라서 두 가지 교수 접근법 순서 중 어느 순서가 더 효과적인지는 여전히 논쟁의 여지가 있으며 계속해서 연구를 해 볼만한 질문이 되겠다. 본 연구에서는 이 질문에 대한 답을 모색해 보았다.

상이한 교수 접근법의 효과성을 검증 연구하는 데 있어, 학습자별 개인차도 고려되어야 할 또 따른 중요한 요소이다(Ching& Wu, 2019; Fyfe et al., 2015; Ottmar & Landy, 2017). 여러 자리 수 곱셈 문제를 해결하기 위해 분배 법칙을 적용하는 것은 다소 복잡한 인지적 과제이다. 이를 성공적으로 수행하기 위해서는 관련된 여러 가지 기초적 지식 및 역량이 요구된다. 이 중 한 자리 수의 덧셈, 뺄셈, 곱셈, 나눗셈의 값을 유창하게 기억해 내는 연산 유창성(arithmetic fluency)은 무엇보다도 중요한 기초 능력이다. 왜냐하면 이 기초 능력은 부분 곱의 값을 구하고 이것들을 결합하여 최종적인 결과 값을 찾아내는 데 있어 연산 감각 기반, 넓이 기반, 방정식 기반 교수 방법에서 모두 활용되기 때문이다. 여기서 흥미롭게 던져볼 수 있는 질문으로는 개인별 연산 유창성 차이에 따라 분배 법칙을 활용한 곱셈 문제 해결 전략 학습 성취에도 차이가 발생하는지 여부일 것이다.

4. 연구 문제

본 연구에서는 다음의 세 가지 연구 문제를 설정하였다. 첫째, 분배 법칙을 활용한 두 자리 수 곱셈 문제 해결 전략 학습 성취와 관련하여 어떤 교수 접근법의 순서(구체적 교수법 선행 vs. 추상적 교수법 선행) 및 어떤 구체적 교수 접근법(연산 감각 기반 vs. 넓이 기반)이 가장 효과적인지 비교 검증하였다. 둘째, 복잡하고 다양한 형태의 곱셈 문제 해결 능력과 관련된 학습 효과의 전이 측면에서 어떤 교수 접근법의 순서 및 어떤 구체적 교수 접근법이 가장 효과적인지 비교 검증하였다. 셋째, 분배 법칙을 활용한 두 자리 수 곱셈 문제 해결 전략 학습 성취가 각 개인별 한 자리 수 연산 유창성과 관련성을 가지는지 확인해 보았다.

Ⅱ. 연구 방법

1. 참가자

본 연구의 참가자는 중산층이 주로 거주하는 서울 남부 소재의 두 개의 초등학교에서 모집되었다. 각 학교별로 3학년 학생들의 가정으로 가정 통신문과 참여 동의서를 발송했으며 약 52%의 가정에서 참여 동의서를 제출하였다. 최종 120명의 학생이 3학년 1학기 말에 (6월 말에서 7월 초순경) 연구에 참여하였다. 이 중 41명의 학생들은 사전 테스트 결과 이미 본 연구의 주 학습 과제인 두 자리 수 곱셈 문제의 75% 이상을 정확하게 풀이하였다. 사후 테스트 후 실시된 개별 설문 확인 결과 이 학생들은 이미 두 자리 곱셈 문제를 개별 과외 또는 학원과 교습소에서 배운 것으로 확인되었다. 따라서 본 연구에서는 선행 학습을 한 학생들을 제외한 나머지 79명의 학생들의 학습 결과를 가지고 연구 문제에 대한 답을 도출하였다.

2. 연구 설계

본 연구는 사전-교수 처치-사후 검사 설계를 채택하였다. 교수법과 관련해서 두 개의 집단 간 주요한 변인이 있다. 첫 번째 집단 간 변인은 교수 접근법 순서와 관련된 것으로 두 가지 수준으로 구분된다: 구체적 교수법 선행 vs. 추상적 교수법 선행. 두 번째 집단 간 변인은 구체적 교수 접근법과 관련된 것으로 두 가지 수준으로 구분된다: 연산 감각 기반 교수 방법 vs. 넓이 기반 교수 방법. 연구 참여에 동의한 참가 학생들은 〈Table 1〉에 제시된 것처럼 4개의 다른 실험 집단 중 한 개의 실험 집단에 임의 배정되었다. 이를 통해 최종적으로 선행 학습을 한 학생을 제외한 구체적 교수법 선행-연산 감각 기반 접근법 20명, 구체적 교수법 선행-도형 기반 접근법 23명, 추상적 교수법 선행-연산 감각 기반 접근법 16명, 그리고 추상적 교수법 선행-도형 기반 접근법 20명의 결과를 분석하였다.

Table 1. Four Groups of Interventions by Instructional Sequence (Concretness Fading vs. Abstraction Instantiation) and Concrete Approach (Arithmetic vs. Area)

실험집단	1주차	2주차
구체적 교수법 선행-연산 감각 기반	연산 감각 기반 모듈	방정식 기반 모듈
구체적 교수법 선행-넓이 기반	넓이 기반 모듈	방정식 기반 모듈
추상적 교수법 선행-연산 감각 기반	방정식 기반 모듈	연산 감각 기반 모듈
추상적 교수법 선행-넓이 기반	방정식 기반 모듈	넓이 기반 모듈

학생들의 학습 성과를 알아보기 위해서 3가지 종속 변수를 사용하였다. 첫 번째 종속 변수는 본 연구의 핵심 학습 과제인 두 자리 곱셈 문제 풀이의 정확도이며 사전 사후 검사에서 두 차례 측정하였다. 두 번째 종속 변수는 학습 전이 정도 측정을 위해 제시된 다음의 3가지 곱셈 과제 풀이 해결 능력의 정확도이다: 연습하지 않은 두 자리 수 곱셈, 세 자리 수와 한 자리 수의 곱셈, 방정식 형태의 두 자리 수 곱셈 문제. 이상의 과제 해결 능력은 사후 검사에서만 측정하였다. 세 번째 종속 변수는 한 자리 수 덧셈과 뺄셈, 곱셈, 나눗셈의 연산 유창성으로 사전 검사에서만 측정하였다.

3. 교수 처치

본 연구에서는 분배 법칙 활용을 통한 곱셈 문제 풀이 해결 지도를 위해 연산 감각 기반, 넓이 기반, 방정식 기반 교수 모듈을 개발하였다. 각 교수 모듈은 5일간 학생들이 자기 주도적으로 학습하고 연습할 수 있도록

워크북 형태로 제작되었다. 각 워크북의 시작은 문제풀이 해결 전략을 설명하는 것부터 시작된다.

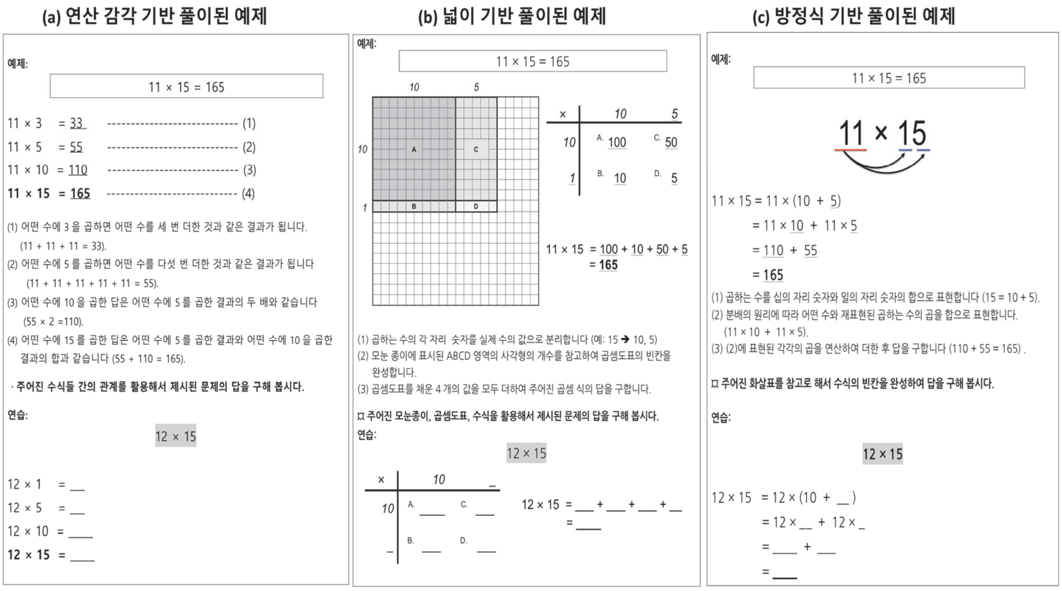

Fig. 1. Worked examples illustrating the (a) arithmetic, (b) area, and (c) algebra approaches.

문제풀이 해결 전략의 설명은 학습을 증진시키는 데 도움이 되는 것으로 확인된 ‘풀이 과정이 잘 제시된 예제(worked examples)’를 통해서 단계별로 구체적으로 나타내었다(Sweller & Cooper, 1985). 각 단계별로 학습자가 간단한 곱셈과 덧셈을 통해서 부분 곱들의 값과 그 합을 스스로 찾아 낼 수 있도록 고안하였다. 그 외의 워크북 분량은 학습한 문제 풀이 해결 전략을 연습하고 익힐 수 있도록 연습 문제를 제시하였다.

4개의 실험 집단에 임의 배정된 학생들은 워크북의 과제를 시작하기 전에 각 집단별로 배정된 연구자 (학교별 교과 교사 및 본 논문의 저자)로 부터 워크북 활용 방법 지도를 안내 받은 후 배정된 연구자와 함께 워크북의 첫 페이지에 제시된 풀이된 예제를 연구자와 함께 풀이 연습하였다. 이후 학생들은 안내된 스케쥴에 따라 워크북을 스스로 완성하였다. 본 논문의 저자인 책임 연구자는 1주차 수요일, 1주차 금요일, 2주차 수요일, 2주차 금요일 총 4회에 걸쳐 참가 학생들의 워크북 완성 정도를 아침 자습 시간, 쉬는 시간, 점심 시간을 할애하여 확인하였으며, 학생들의 질문 요청이 있을 경우 보충 개별 지도를 하였다.

각 교수 모듈별 구체적 교수 방법을 살펴보면, 연산 감각 기반 교수 모듈은 두 자리 수 곱셈 문제 해결에 있어 간접적으로 분배 법칙을 익힐 수 있도록 간단한 연산을 연속적으로 실행하게 하는 전략을 지도하였다. 〈Fig 1a〉에 풀이 과정이 잘 제시된 예제가 나타나 있다. 이 전략은 먼저 세 가지 부분 곱들의 값을 구하게 한 후 이 부분 곱들을 합해서 최종 곱의 값을 직관적으로 도출할 수 있도록 하였다.

넓이 기반 교수 모듈은 두 자리 수 곱셈 문제 해결에 있어 간접적으로 분배 법칙을 익힐 수 있도록 곱셈 문제를 도형 문제로 시각화해서 문제를 해결하는 전략을 지도하였다. 〈Fig 1b〉에 풀이 과정이 잘 나타난 예제가 있다. 이 전략은 먼저 곱셈식의 두 수를 도형의 가로와 세로로 나타내도록 하였다. 둘째, 도형의 가로와 세로 길이를 십의 자리 수와 일의 자리 수로 분해하도록 하였다. 셋째, 4개의 영역으로 분할된 도형의 넓이를 계산하도록 하였다. 그리고 마지막으로 이러한 각 영역의 넓이를 합하여 최종 결과 값을 도출해 내도록 하였다.

방정식 기반 모듈은 곱셈 문제 해결을 위해 직접적으로 분배 법칙을 익힐 수 있도록 하는 전략을 지도하였

다. 〈Fig 1c〉에 풀이 과정이 잘 나타난 예제가 제시되어 있다. 이 전략은 먼저 곱하는 수를 십의 자리 수와 일의 자리 수로 분해하도록 하였다. 둘째 분배 법칙에 의해 만들어진 각각의 부분 곱의 값을 구하게 하였다. 마지막으로 이 부분 곱의 합을 이용하여 최종 계산 값을 도출하도록 하였다.

참가 학생들은 2주에 걸쳐 교수 접근법의 순서 및 구체적 교수 접근법의 정도에 따라 구별화 된 2개의 교수 모듈을 완성하였다. 이러한 교수 모듈의 조합은 〈Table 1〉에 제시된 것 같이 총 4가지로 (1) 구체적 교수법 선행-연산 감각 기반 접근법, (2) 구체적 교수법 선행-넓이 기반 접근법, (3) 추상적 교수법 선행-연산 감각 기반 접근법, (4) 추상적 교수법 선행-넓이 기반 접근법이다. 각각의 교수 모듈 조합은 구체적 교수법(연산 감각 기반 또는 넓이 기반)과 추상적 교수법(방정식 기반)의 결합으로 이루어졌다.

각 모듈은 100문제의 연습 문제를 포함하였다. 이 연습 문제들은 11과 19사이의 다양한 두 자리 수 × 두 자리 수의 곱셈들로 이루어져 있으며 12 × 12 와 같이 곱하는 두 수의 크기가 같은 동일형 곱셈 문제(tie)는 포함시키지 않았다. 왜냐하면 동일형 곱셈 문제의 경우 다른 유형의 곱셈 문제보다 손쉽게 풀 수 있기 때문에(Groen & Parkman, 1972) 상대적으로 연습이 덜 필요하다고 판단하여 포함시키지 않았다. 총 100개의 연습 문제는 5일에 걸쳐 서로 다른 빈도로 연습 기회가 부여 되었다. 곱하는 수의 크기가 작은 11과 16사이의 곱하는 수들은 첫 3일의 연습문제로 제시되었다. 반면에 곱하는 수의 크기가 큰 17과 19사이의 곱하는 수들은 첫 날을 제외한 나머지 4일 동안 모두 제시하였다. 이와 같은 배치를 통해 크기가 큰 수의 곱셈 문제를 조금 더 충분히 연습할 수 있도록 기회를 부여하였다.

4. 평가도구

다음과 같이 총 3가지 종류의 평가도구를 사용하였다: (1) 교수 모듈을 통해 연습한 두 자리 수 곱셈 문제, (2) 교수 모듈에서 연습하지 않은 복잡하고 다양한 형태의 곱셈 문제, (3) 한 자리 수 덧셈, 곱셈, 뺄셈, 나눗셈 문제.

먼저 교수 모듈을 통해 연습한 두 자리 수 곱셈 문제 평가는 교수 모듈에서 연습한 20개의 곱셈 문항으로 이루어졌다. 곱하는 수들은 모두 11과 19사이에 있으며 동형 곱셈 문제는 포함시키지 않았다. 참가 학생들은 15분의 시간 동안 주어진 문제를 해결했으며 각 학생의 정답 문항 수를 종속 변인으로 사용하였다. 이 학습 평가는 교수 모듈을 학생들에게 가르치기 전 후 총 2회에 걸쳐 진행되었다. 학생들의 평가 결과는 본 연구의 첫 번째 연구 질문인 어떤 교수 접근법의 순서(구체적 교수법 선행 vs. 추상적 교수법 선행)와 어떤 구체적 교수법(연산 감각 기반 접근 vs. 넓이 기반 접근)이 두 자리 수 곱셈 연산 능력을 가장 효과적으로 향상시키는지를 비교 검증하는 데 사용하였다.

다음으로 학습 효과 전이 정도를 측정하기 위해 3가지 평가 과제를 사용하였다. 첫 번째 평가 과제는 연습하지 않은 5문항의 두 자리 수 × 두 자리 수로 이루어져 있다. 해당 평가 과제의 경우 곱하는 수의 범위가 21과 99 사이이며, 역시 동형 곱셈 문제는 포함시키지 않았다(예: 27 × 23). 두 번째 평가 과제는 5 문항의 세 자리 수 × 한 자리 수로 이루어져 있다(예: 139 × 7). 세 번째 평가 과제는 5문항의 방정식 형태의 곱셈 문항으로 이루어져 있다(예: 12 × __ = 156). 이 문항의 경우 하나의 곱하는 수의 값과 최종 결과 값만 제시하였을 뿐, 알려지지 않은 곱하는 수의 경우는 역연산 법칙을 활용하여 그 값을 도출해 내야 한다. 참가 학생들은 10분의 시간 동안 15문항의 복잡하고 다양한 형태의 곱셈 문제를 해결했으며 각 학생의 정답 문항 수를 종속 변인으로 사용하였다. 이 학습 효과 전이 평가는 오직 교수 모듈을 학생들에게 가르친 후 사후 검사에서만 1번 측정하였다. 학생들의 평가 결과는 본 연구의 두 번째 연구 질문인 어떤 교수 접근법의 순서 및 어떤 구체적 교수법이 다양한 형태의 복잡한 곱셈 문제 풀이 능력을 가장 향상시키는지를 비교 검증하는 데 사용하였다.

마지막으로 한 자리 수 연산 유창성과 관련하여 3가지 평가 과제를 사용하였다. 첫 번째 평가 과제는 40문항의 한 자리 수의 덧셈과 뺄셈을 포함하였다. 두 번째 평가 과제는 40문항의 한 자리 수의 곱셈을 포함하였

다. 세 번째 평가 과제는 40문항의 한 자리 수 나눗셈 문항을 포함하였다. 참가 학생들은 주어진 1분의 시간 동안 각각의 평가 과제를 해결했으며, 각 과제별 기록한 정답 문항 수를 종속 변인으로 사용하였다. 연산 유창성 평가는 사전 테스트에서만 1회 측정하였다. 학생들의 평가 결과는 본 연구의 세 번째 연구 질문인 두 자리 수 곱셈 문제 해결 전략 학습 성취와 연산 유창성과의 관련성을 확인하는 데 사용하였다.

5. 연구절차

참가 학생들은 4개의 실험 집단으로 임의 배정된 후 교수 처치를 받기 전 주 금요일 방과 후 시간에 두 자리 수 곱셈 문제와 한 자리 사칙연산 문제 사전 테스트를 완료하였다. 사전 테스트 직후 각 실험 집단별로 배정된 연구자들은 학생들에게 워크북 사용법을 안내하였으며, 워크북의 첫 페이지에 제시된 풀이된 예제를 학생들에게 지도하였다. 이후 학생들은 교수 학습 1주 차에 첫 번째 교수 모듈 워크북을 스스로 완성하였다. 각 해당 모듈은 앞서 언급한 것처럼 교수 접근법 순서 및 구체화 정도에 따라 서로 다른 수준들로 구별화되어 있다. 학생들은 각 문제 풀이 해결 전략의 설명과 잘 풀이된 예시 문제를 스스로 읽고 학습한 후 워크북에 제시된 연습문제 일정표에 따라 5일에 걸쳐 매일 20개의 문항을 풀이하고 연습하였다. 학생들은 교수 학습 2주차에 두 번째 교수 모듈 워크북을 1주차와 동일한 순서와 연습 절차에 따라 완성하였다. 그리고 2주차 마지막 금요일 방과 후 시간에 두 자리 수 곱셈 문제와 연습하지 않은 다양한 곱셈 문제들로 이루어진 사후 테스트를 완료하였다.

Ⅲ. 연구 결과

본 연구는 먼저 교수 접근법 순서(구체적 교수법 선행 vs. 추상적 교수법 선행)와 구체적 교수 접근법 (연산 감각 기반 vs. 넓이 기반)에 따라 구별화된 4 개의 실험 집단들의 사전 테스트 결과에 유의미한 차이가 있는지를 확인하였다. 이원분산 분석 결과 교수 접근법 순서(F(1, 75) = .014, p = .906, η_p^2 = .000)와 구체적 교수 접근법(F(1, 75) = .176, p = .676, η_p^2 = .002)에 따라 학생들의 사전 두 자리 수 곱셈 연산 능력에 차이가 없는 것으로 나타났으며 교수 접근법 순서와 구체적 교수 접근법에 의한 상호작용 효과도 없는 것으로 나타났다(F(1, 75) = .110, p =.741, η_p^2 = .001). 이러한 결과는 교수 처치를 받기 전 4가지 실험 집단의 두 자리 곱셈 연산 능력이 서로 비슷한 수준으로 임의 배정이 성공적으로 잘 이루어졌음을 보여준다. 〈Table 2〉에 4 개 실험 집단의 사전 사후 연습한 두 자리 곱셈의 평균 점수를 제시하였다.

Table 2. Descriptive Statistics for Performance on the Target 2D × 2D Multiplication Problems at Pretest and Posttest by Four Groups

실험집단	사전 테스트 M (SD)	사후 테스트 M (SD)
구체적 교수법 선행-연산 감각 기반	2.40 (5.1)	14.58 (7.0)
구체적 교수법 선행-넓이 기반	1.65 (3.7)	10.43 (9.1)
추상적 교수법 선행-연산 감각 기반	2.19 (4.4)	14.63 (7.0)
추상적 교수법 선행-넓이 기반	2.10 (4.4)	10.35 (9.1)

1. 학습

첫 번째 연구 질문은 분배 법칙을 활용한 두 자리 수 곱셈 문제 해결 능력을 기르는 데 있어 어떤 교수 접근법의 순서 및 어떤 구체적 교수 접근법이 가장 효과적인지를 알아보는 것이다. 이 연구 질문의 답을 찾기

위해 반복측정 이원분석 결과를 실시하였다. 집단 간 변인으로는 교수 접근법 순서와 구체적 교수 접근법을 포함시켰으며 집단 내 변인으로는 사전 사후 검사의 시간을 포함시켰다. 종속 변인은 목표로 한 두 자리 수 곱셈 문제에서 획득한 정답 문항 수이다. 분석 결과 교수 접근법 순서에 따른 유의미한 차이는 없는 것으로 나타났다(F(1, 74) = .00, p = .988, η_p^2 = .00). 반면에 구체적 교수 접근법(F(1,74) = 3.90, p = .052, η_p^2 = .05)의 경우 다소 유의미한 차이를 만드는 것으로 확인되었다. 시간적 변인의 경우(F(1, 74) = 136.26, p 〈 .001, η_p^2 = .648) 학생들의 정답 수에 유의미한 차이를 만드는 것으로 나타났다.

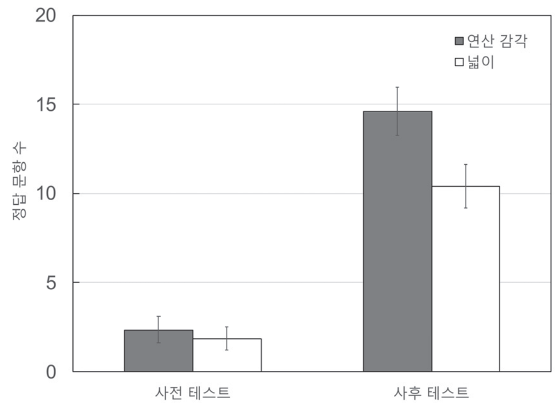

Fig. 2. Performance on the target 2D × 2D multiplication problems. At pretest, there was no difference between those who would experience the arithmetic vs. area concrete modules. However, at posttest, those who experienced the arithmetic module had higher performance. Data plotted M ± SE.

특별히 〈Fig 2〉에서 확인 되는 것처럼 구체적 교수 접근법과 시간의 상호 작용 효과가 있는 것으로 확인되었다(F(1, 74) = 4.40, p = .039, η_p^2 = .056). 사전테스트에서는 연산 감각 기반 교수 방법(M = 2.31, SD = 4.73) 과 넓이 기반 접근 방법(M = 1.86, SD = 3. 98)에 속한 학생들의 평균 점수가 서로 비슷하였다(t(77) = .45, p = .651, d = 0.10). 하지만 사후 테스트에서는 연산 감각 기반 교수 방법에 속한 학생들의 평균점수(M = 14.60, SD = 8.91)가 넓이 기반 교수 방법에 속한 학생들의 평균 점수(M = 10,40, SD = 8.91)보다 월등히 높은 것으로 나타났다, t(75.4)이분산 가정= 2.40, p = .019, d = 0.54. 그 외에 변인들 간의 유의미한 상호 작용 효과는 없는 것으로 확인되었다(Fs 〈 .07, ps 〉 .79, η_p^2〈 .01).

이를 정리하면 학습하고 연습한 두 자리 수 곱셈 문제 해결 능력을 기르는 데 있어서는 연산 감각 기반 교수 방법이 넓이 기반 교수 방법보다 훨씬 효과적인 것으로 나타났다. 교수 접근법의 순서와 관련하여 구체적 교수법 선행 및 추상적 교수법 선행 모두 동일한 학습 효과를 주는 것으로 나타났다.

2. 전이

두 번째 연구 질문은 어떤 교수 접근법의 순서 및 어떤 구체적 교수 접근법이 복잡하고 다양한 형태의 곱셈 문제 해결 능력의 학습 효과 전이에 가장 효과적인지를 알아보는 것이다. 해당 연구 질문의 답을 찾기 위해 사후 테스트에서 측정한 각각의 학습 전이 평가 결과에 대해 일원 변량분석을 실시하였다. 첫 번째 학습 전이 평가 과제의 경우는 연습하지 않은 두 자리 수 곱셈 문제 문항으로 교수 접근법 순서 및 구체적 교수 접근법, 그리고 이들 간의 상호작용 효과에 따른 유의미한 차이는 나타나지 않았다(Fs 〈 1.30, ps 〉.25, η_p^2 〈 .02). 두 번째 학습전이 평가의 경우 세 자리수와 한 자리 수 곱셈 문제 문항으로 역시 어떠한 주 효과 및 상호작용

효과도 통계적으로 유의하지 않았다($Fs < 1.68$, $ps > .19$, $\eta_p^2 < .03$). 마지막으로 세 번째 학습 전이 평가는 방정식 형태의 두 자리 수의 곱셈으로 이 또한 어떠한 주 효과 및 상호작용 효과도 통계적으로 유의하지 않았다($Fs < 1.35$, $ps > .25$, $\eta_p^2 < .02$). 이를 종합해 보면 〈Fig 3〉에서 확인할 수 있듯이 서로 다른 교수 접근법 순서와 서로 다른 구체적 교수 접근법 모두 동일한 학습 효과 전이를 가져오는 것으로 나타났다.

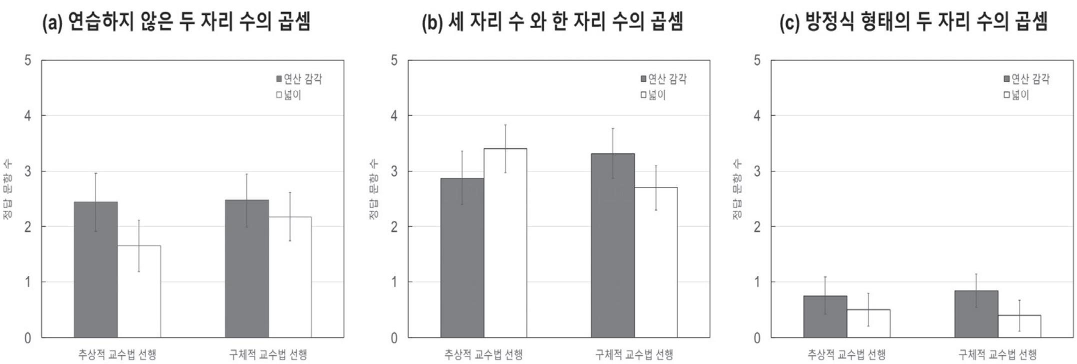

Fig. 3. Performance on the three transfer measures at posttest: (a) non-target 2D × 2D multiplication, (b) 3D × 1D multiplication problems, and (c) target 2D × 2D multiplication in algebraic format. Neither the instructional sequence nor the concrete module affected transfer. Data plotted M ± SE.

3. 개인차 연구

세 번째 연구 질문의 경우 한 자리 수 연산 유창성이 분배 법칙을 활용한 두 자리 수 곱셈 문제 해결 전략 학습 성취에 영향을 미치는지 알아보는 것이다. 본 연구에서 활용된 모든 교수 방법에서 부분 곱의 값을 계산해야 된다는 점에서 한 자리 수 연산 유창성이 두 자리 수 곱셈 문제의 정답을 찾는데 영향을 미칠 수 있음을 자연스럽게 추론할 수 있다.

이러한 추론을 검증하기 위해 먼저 상관분석을 실시하였다. 〈Table 3〉에 한 자리 수 유창성과 두 자리 수 곱셈의 사전 사후 테스트 결과 값의 상관 관계가 나타나 있다. 흔히 예상할 수 있는 대로 한 자리 수 연산 유창성 측정 결과 값들은 서로 매우 높은 상관 관계를 가지고 있는 것으로 나타났다($rs > .678$, $ps < .001$). 또한 두 자리 수 곱셈의 사전 사후 측정 결과 값 또한 유의한 상관 관계를 가지는 것으로 나타났다($r = .337$, $p = .003$). 마지막으로 모든 한 자리 수 연산 유창성 측정 값의 경우 두 자리 수 곱셈의 사후 측정 값과 유의한 상관 관계를 가지는 것으로 나타났는데($rs > .409$, $p < .001$), 특별히 이 중에 덧셈/뺄셈 연산 유창성의 경우 가장 높은 상관 관계를 보였다($r = .495$, $p < .001$). 하지만 두 자리 수 곱셈의 사전 측정 값과의 상관 관계에 있어서는 덧셈/뺄샘 연산

Table 3. Correlations among the Arithmetic Fluency Measures and the Target 2D × 2D Multiplication Measure at Two Time Points

	1	2	3	4
1. 덧셈/뺄셈 연산 유창성				
2. 곱셈 연산 유창성	.680***			
3. 나눗셈 연산 유창성	.678***	.708***		
4. 사전 두 자리 수 곱셈	.176	.190	.403***	
5. 사후 두 자리 수 곱셈	.495***	.409***	.456***	.337**

** $p < .01$; *** $p < .001$.

유창성과 곱셈 연산 연창성 모두 어떠한 유의미한 상관 관계도 가지고 있지 않았다(rs 〈 .190, ps 〉 .094).

이러한 상이한 형태의 상관 관계 분석 결과 값을 고려했을 때, 교수 모듈을 학습하기 이전에는 한 자리 수 연산 유창성이 두 자리 수 곱셈 문제를 해결하는 데 필수불가결한 요소는 아니였음을 알 수 있다. 하지만 교수 모듈을 통해 분배 법칙을 익히고 난 이후에는 한 자리 수 연산 유창성이 두 자리 수 곱셈 문제를 해결하는 데 매우 중요한 역할을 하게 됨을 알 수 있다. 이를 보다 명확히 검증하기 위하여 위계적 회귀 분석 방법을 실시하였다. 예측할 준거 변수로 두 자리 수 곱셈의 사후 측정 결과 값을 사용하였다. 첫 번째 단계로 두 자리 수 곱셈의 사전 테스트 측정 결과 값을 예측 변인으로 입력하였다. 해당 모델은 두 자리 수 곱셈의 사후 측정 결과 값을 11.3% 유의하게 설명하였다(F(1, 76) = 9.71, p = .003). 사전 자리 수 곱셈 결과 값을 통제한 후 두 번째 단계로 한 자리 수 덧셈/뺄셈, 곱셈, 나눗셈 연산 유창성 결과 값을 예측변인으로 입력하였다. 그 결과 두 자리 수 곱셈의 사후 측정 결과 값을 추가적으로 20.5% 유의하게 설명하였다(R^2 = 31.8%, F(3, 73) = 7.29, p 〈 .001). 최종 모델은 통계적으로 유의했으며 〈Table 4〉에 상세한 결과 값을 제시하였다. 최종 모델 결과 값의 표준화된 회귀 계수(standardized beta coefficient)의 값을 통해 알 수 있듯이 분배 법칙을 통해 두 자리 수의 곱셈 문제 해결 능력을 익히는 데 있어 덧셈/뺄셈의 연산 유창성(stand. β = .360, p = .014)이 가장 중요한 것으로 나타났으며 이는 사전 두 자리 수의 곱셈 문제 해결 능력의 표준화된 회귀 계수 값(stand. β = .234, p = .032)보다 더 큰 것으로 나타났다.

Table 4. Final Regression Model Predicting Performance on Target 2D × 2D Multiplication Problems at Posttest

변인	비표준화 계수	표준오차	표준화계수	t	유의확률
절편	.727	2.591		.280	.780
사전 두 자리 수 곱셈	.441	.202	.234	2.181	.032
덧셈/뺄셈 유창성	.313	.124	.360	2.527	.014
곱셈 유창성	.055	.116	.071	.475	.636
나눗셈 유창성	.061	.141	.070	.434	.665

Ⅳ. 논의 및 결론

본 논문은 구체적 교수법과 추상적 교수법의 결합을 통해서 초등학교 3학년 학생들에게 효과적으로 분배 법칙을 지도할 수 있으며 이를 통해 학생들의 두 자리 수 곱셈 연산 능력을 향상시킬 수 있음을 보여줬다. 특별히 학생의 덧셈과 뺄셈의 기초 연산 산술 지식과 수에 대한 감각 이해를 바탕으로 한 연산 감각 기반 교수 방법이 넓이 기반 교수 방법보다 두 자리 수 곱셈 연산 능력 향상에 보다 효과적임을 보여주었다. 이는 초기 학습 단계에서는 새로운 개념이나 상황을 도입하기 보다는 기존의 학습자가 가지고 있는 사전 지식을 효과적으로 접목하는 것이 학습 효과를 극대화하는 데 더 효과적일 수 있음을 보여 주었다. 개인별 학습 차와 관련해서는 분배 법칙을 학습한 이후에는 각 학생의 한 자리 수 곱셈 연산 유창성보다 한 자리 수의 덧셈과 뺄셈 연산 유창성이 두 자리 수 곱셈 연산 능력을 예측하는 데 더 중요한 변인임을 확인할 수 있었다. 이러한 결과는 분배 법칙을 통해서 최종 계산 값을 구할 때 부분 곱들의 합을 구하게 되는 계산 과정을 반영한다고 볼 수 있다. 이상의 주요 결과를 바탕으로 교육적 시사점 및 교수 학습 지도 방안, 본 연구의 한계점 및 향후 연구 방향에 대해 논의하였다.

첫째, 본 연구에서는 분배 법칙을 지도하기 위한 서로 다른 교수법의 순서(구체적 교수법 선행 vs. 추상적

교수법 선행) 및 서로 다른 구체적 교수 접근법(연산 감각 기반 vs. 도형 기반)이 두 자리 수 곱셈 연산 방법을 익히고 능력을 기르는 데 어떤 효과를 지니는지 살펴보았다. 그 결과 구체적 교수 접근법에 따른 두 자리 수 곱셈 연산 능력 향상에 유의미한 차이가 나타남을 확인할 수 있었다. 연산 감각을 기반으로 한 실험 집단의 경우 넓이를 기반으로 한 실험 집단보다 사후 테스트에서 더 높은 연산 능력의 향상을 나타냈다. 하지만 교수법의 순서에 따른 실험 집단 간의 유의미한 학습 차이는 확인할 수 없었다. 구체적 교수법 선행, 추상적 교수법 선행 실험 집단 모두 비슷한 수준의 두 자리 수 곱셈 연산 능력의 향상을 나타냈다. 이는 교수법의 순서와 상관없이 구체적 교수법과 추상적 교수법의 적절한 결합은 초등학교 학생들에게 다소 어려울 수 있는 추상적 수학 개념인 분배 법칙을 효과적으로 지도하는 데 도움이 될 수 있음을 제시하였다.

초등학교 시기에 추상적 개념의 방정식 내용을 학생들이 이해할 수 있는지에 대해서는 보편적으로 의문을 많이 품는 것이 사실이다. Piaget의 인지발달 단계 이론에 비추어 보더라도 구체적 조작 시기에 있는 초등학생 아동의 경우 방정식과 같은 추상적 문제 해결이 힘들 수도 있다. 하지만 최근에 발표되고 있는 연구 논문들을 살펴보면 구체적 조작물 및 발달 단계에 적합한 교수적 접근법이 동반되면 초등학생도 등호, 변수, 연산 법칙, 다른 형태의 방정식 관련 추상적 개념들을 익히고 습득할 수 있음을 확인할 수 있다(Blanton et al., 2015; Cai & Knuth; 2011). 예를 들어 Blanton et al.(2015)은 초등학교 3학년 학생도 수학적 등호 기호 "="가 가지고 있는 두 식의 동등한 관계, 수식에 포함된 변수의 개념, 다양한 표기법을 통해 나타내는 미지수, 수식에 내재되어 있는 연산 법칙들을 배우고 익힐 수 있음을 나타내는 연구 결과를 제시하기도 하였다.

이러한 측면에서 본 연구에서 확인된 내용은 초등학생도 방정식 법칙 중 하나인 분배 법칙을 익히고 사용할 수 있다는 점을 보여줬다는 측면에서 또 다른 근거를 제시했다고 볼 수 있겠다. 특별히 학생들이 분배법칙을 배우고 익히는 데 있어서 기존의 자신이 잘 알고 있는 수와 연산 감각을 바탕으로 한 구체화된 교수법으로 접근했을 때 그 효과가 가장 잘 나타나게 됨을 확인할 수 있었다. 연산 감각을 기반으로 한 교수 방법의 경우 두 자리 수의 곱하는 수를 자리 수 개념을 통해 십의 자리 숫자와 일의 자리 숫자의 작은 수들로 분해하고 이를 바탕으로 한 자리 수 연산 산술 지식을 활용할 수 있게 함으로써 두 자리 수 곱셈을 처음 배우는 학생들도 손쉽게 분배 법칙을 익히고 활용할 수 있음을 보여줬다. 물론 넓이를 기반으로 한 교수 방법도 분배 법칙을 지도하는 효과적인 교수법 중의 하나이다. 하지만 초기 학습시기에는 도형적 지식을 요구하는 등의 인지적 부담과 덜 익숙하다는 점에서 충분히 분배 법칙 개념을 익히고 숙달한 이후에 활용하는 것이 더 효과적일 수 있음을 고려해 볼 수 있겠다.

이를 종합하여 교수학습 지도 방안을 제안하면 수학 학습 지도에 있어서 학습자가 가지고 있는 사전 지식과 배워야 할 지식들의 연결점 등을 파악한 후, 한 가지 교수법으로 일괄 지도하기보다는 본 연구에서와 같이 다양한 교수 방법을 접목하여 학생들을 지도할 것을 제안하는 바이다. 이를 통해 학생들은 수학 개념 이해 및 학습 증진에 더 실질적인 도움을 받을 수 있을 것으로 기대된다.

둘째, 본 논문에서는 사용된 교수 접근법들이 직접적으로 학습하지 않은 다양한 형태의 두 자리 수의 곱셈 및 복잡한 형태의 여러 자리 수 곱셈에서도 긍정적인 학습 전이 효과를 가져오는지 살펴보았다. 그 결과 교수법 순서 및 구체적 교수 접근법에 따른 유의미한 차이는 확인할 수 없었다. 4개 실험 집단 모두 비슷한 학습 결과를 기록하였다. 이러한 결과에 대한 해석으로는 교수 처치가 교사의 직접적인 학습지도가 아닌 워크북을 바탕으로 한 자기주도적인 학습 형태로 이루어진 점, 교수 처치 기간이 10일로 충분하지 않았다는 점 등이 결과에 영향을 미친 것으로 짐작할 수 있다. 한편으로 학생들이 학습 전이 평가 테스트에서 기록한 총점의 경우 연습한 두 자리 수 곱셈에서 기록한 총점의 약 61%(M = 12.28, 총점 20점)와 비교했을 때 상대적으로 낮은 편이었다. 연습하지 않은 두 자리 곱셈의 경우는 전체 총점의 약 43%(M = 2.17, 총점 5점), 세 자리 수와 한 자리 수 곱셈의 경우 전체 총점의 약 60%(M = 3.06, 총점 5점), 방정식 형태의 두 자리 수의 곱셈은 전체 총점의 약 12% (M = 0.6, 총점 5점)의 정답 성취 수준을 보인 것으로 확인되었다.

본 연구에서 사용된 학습 전이 평가 문항들의 문제 난이도를 고려할 때, 상대적으로 낮은 정답 성취 수준은 수긍이 가능한 부분으로 여기에서는 한 가지의 긍정적 측면과 난제점을 짚어보고자 한다. 먼저 긍정적인 측면을 찾아보자면 분배 법칙을 학습함으로써 익힌 두 자리 수 곱셈 문제 풀이 방법을 세 자리 수와 한 자리 수의 곱셈 문제 풀이에도 잘 적용한 것으로 보인다. 세 자리 수의 곱하는 수의 크기를 고려했을 때 다소 어려울 수도 있었지만, 학생들은 연습한 두 자리 곱셈 수에서 기록한 정답 수준과 비슷한 수준의 약 60% 정답 성취 수준을 기록함으로써 학습 전이가 효과적으로 이루어졌음을 나타냈다고 볼 수 있겠다.

반면에 한 가지 난제점을 짚어 보자면 방정식 형태의 곱셈 문항의 경우 정답 성취도 수준이 약 12% 수준으로 매우 낮았다. 이러한 낮은 성취 수준에 대한 설명을 찾아보자면 사용된 곱하는 수의 크기와 문제 형태가 유사하다고 할지라도 방정식 형태의 곱셈 문제를 풀기 위해서는 수식을 변화하고 단순화하기 위한 또 다른 방정식 개념들이 추가적으로 요구된다. 예를 들어 12 × ___ = 156의 문제를 풀기 위해서는 ___ × 12 = 156로 변환이 필요한 데 이를 위해서는 제수와 피제수의 교환법칙이 성립함을 이해해야 한다. 또한 ___ × 12 ÷ 12 = 156 ÷ 12 로 식을 전개하고 단순화하기 위해서는 곱셈과 덧셈의 역연산 관계에 대한 이해도 요구된다. 마지막으로 1을 곱하면 항상 그 자신의 수가 나온다는 항등 법칙에 대한 이해도 있어야 손쉽게 ___ × 1 = 13, ___ = 13, 미지수 13의 값을 찾게 된다. 또 다른 설명으로는 2주간의 짧은 교수 기간과 워크북을 중심으로 한 지도전달 방식에 있어 즉각적인 피드백을 제공할 수 없었던 점 등이 학습 전이 효과를 감소시켰다고 볼 수도 있겠다.

셋째, 본 논문에서는 각 개인의 한 자리 수 연산 유창성과 분배 법칙을 통해 익힌 두 자리 수 곱셈 연산 능력간의 관련성에 대해서도 살펴보았다. 회귀분석 결과 흔히 생각할 수 있는 한 자리 수 곱셈 연산 유창성과 두 자리 수 곱셈의 관련성 보다는 한 자리 수 덧셈과 뺄셈의 연산 유창성이 두 자리 수 곱셈과 관련성이 더 높은 것으로 나타났다. 이러한 결과를 해석해 본다면 두 자리 수 곱셈의 경우, 부분 곱들의 값을 곱셈을 통해서 계산하는 것도 중요하지만 곱하는 수들을 자리 수에 따라 정확히 재구성하고 부분 곱들의 합을 덧셈과 뺄셈을 통해서 알맞게 결합하는 과정이 더 중요한 역할을 함을 보여준다고 이해할 수 있겠다. 따라서 교수 측면에서 기초 곱셈에 대한 지도와 더불어 덧셈과 뺄셈에 대한 지도도 소홀히 해서는 안 되겠다. 한 자리 수 곱셈의 경우 유창성을 기르는 데 있어 곱셈 구구표를 숙지하고 암기하는 요소가 가장 중요하겠지만 덧셈과 뺄셈의 경우 암기된 산술 지식과 더불어 자리 수 개념 및 수의 크기에 따라 정확히 올림과 내림을 해야 한다는 점에서 더 세심한 지도가 필요하겠다.

본 논문은 몇 가지 제한 점을 지니는 데, 이는 후속 연구를 위한 아이디어와 시사점을 제공해 준다. 먼저 본 논문은 사칙연산 중 곱셈 영역, 다양한 연산 법칙 중 분배 법칙에 한해서 다양한 교수적 접근법들의 효과를 검증하였다. 따라서 다른 사칙연산 영역, 연산 법칙에 본 연구의 결과를 그대로 적용하는 데 한계가 있다. 하지만 기존의 비슷한 형태의 연구 논문들을 살펴볼 때 구체적 교수법 및 추상적 교수법을 결합해서 다른 사칙연산 영역, 연산 법칙에서 동일하게 적용할 수 있을 것으로 보인다. 예를 들어, Carpenter et al.(1998)은 초등학교 저학년 학생들도 여러 자리 수의 덧셈과 뺄셈 문제를 수 감각 및 자리 수 개념을 활용해서 연산식을 재구성하여 문제를 해결할 수 있음을 보여줬다. 하나의 예시를 든다면 45 + 29 문제의 경우 자리 수에 따라 40 + 20 + 5 + 9 = 60 + 14 = 74 형태로 분해해서 풀 수도 있으며 또 한편으로 45 + 30 – 1 = 75 – 1 = 74 과 같이 계산하기 쉬운 10의 배수 형태의 수를 만든 후 추가된 1을 뺌으로써 복잡한 계산을 하지 않고도 손쉽게 문제를 풀 수 있는 방법도 고안할 수 있다. 이러한 형태의 다양한 형태 결합법칙의 경우 아동의 자리 수 개념에 대한 사전 지식과 올림과 내림의 계산 절차와 잘 접목시켜, 구체적 교수법 및 추상적 교수법을 결합한 형태의 교수 지도 방안을 고려해 볼 수 있겠다.

둘째, 본 연구에서는 수학과 관련된 각 아동의 수학 학습 특정 능력만 측정했을 뿐 그 외에 작업 기억(working memory)과 같은 일반적인 인지 능력의 경우는 따로 측정하지 않았다. 기존의 연구 논문들을 보면 복잡한 연산 문제를 푸는 데 있어서는 각 개인의 작업 기억 능력도 문제 풀이 해결의 성공 여부를 결정하는

데 영향을 미치는 것으로 확인 된다(Passolunghi & Siegel, 2001). 예를 든다면, Liu et al.(2015)의 경우 연산 분배 법칙 적용, 작업 기억, 곱셈 문제 풀이 능력간의 상관 관계를 조사하였는데 각 개인의 시공간 메모장(visuospatial sketchpad) 작업 기억이 복잡한 곱셈 문제 풀이에 유의미한 영향을 줌을 보여 주었다. 후속 연구에서는 작업 기억 훈련이 본 연구에서 활용된 교수 방법들의 효과를 끌어 올리는 데 도움이 되는지 살펴보는 것도 흥미로울 것이다.

셋째, 본 연구는 두 자리 수의 곱셈 문제 풀이 방법을 학교 정규 수학 수업에서 배우기 전에 실시되었다. 이런 측면에서 정규 수학 수업과 병행하여 본 연구에서 사용한 워크북을 부수적인 학습 교재로 동시에 활용한다면 아동의 학습 효과 증진에 더 큰 도움을 줄 수 있을 것으로 보인다. 마지막으로 다소 작은 규모의 표본 집단 크기, 한정된 학습 집단 (선행학습을 하지 않은 3학년 학생), 짧은 교수 처치 기간, 지연-사후 테스트가 없었다는 점에서 후속 연구에서는 이러한 제한 점들을 보완해야하겠다.

두 자리 수 이상의 연산과 같은 복잡한 연산의 경우 단순한 산술 지식뿐만 아니라 수 개념 및 연산 과정들을 충분히 이해하는 보다 깊은 개념적 이해가 요구된다. 따라서 수학 교육에 관련된 연구자와 교사들은 단순 산술 지식 암기를 넘어서 각 연산 과정에 내재되어 있는 다양한 연산 법칙과 수 개념들을 심도 있게 지도하는 데 주의가 필요하겠다. 또한 이러한 과정에서 다양한 교수적 접근법 들을 효과적으로 결합하여 연산 법칙 및 수 개념 향상에 도움을 줄 수 있는 교수법들을 개발하는 데 노력을 해야 하겠다.

참고문헌

강완, 김상미, 박만구, 백석윤, 오영열, 장혜원 (2014). **초등 수학교육론**. 서울: 경문사.

김주창, 이광호 (2019). 시각적 모델에 따른 곱셈식 표현 방법에 대한 연구. **초등수학교육, 22**(1), 65-82.

임미인, 장혜원 (2017). 산술적 사고의 의미와 요소 분석. **수학교육학연구, 27**(4), 765-789.

임영빈, 홍진곤 (2016). 초등기하 학습에서의 구체물과 반구체물 활용에 대한 연구. **학교수학, 18**(3), 441-455.

장혜원 (2017). 교과서 분석에 기초한 연산법칙의 지도 방안 탐색. **한국초등수학교육학회지, 21**(1), 1-22.

정영옥 (2013) 초등수학에서 자연수 곱셈 지도. **학교수학 15**(4), 889-920.

황리리, 신현기 (2008). 학습장애 학생들을 위한 효과적인 곱셈 구구 중재전략에 관한 문헌분석. **특수교육학연구, 43**(1), 69-89.

Baroody,A. J. (2003). The development of adaptive expertise and flexibility: The integration of conceptual and procedural knowledge. In A. J. Baroody & A.Dowker (Eds.), *The development of arithmetic concepts and skills:Constructing adaptive expertise* (pp. 1–34). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Blanton, M., Stephens, A., Knuth, E., Gardiner, A. M., Isler, I., & Kim, J. S. (2015). The development of children's algebraic thinking: The impact of a comprehensive early algebra intervention in third grade. *Journal for Research in Mathematics Education, 46*, 39-87.

Braithwaite, D. W., & Goldstone, R. L. (2013). Integrating formal and grounded representations in combinatorics learning. *Journal of Educational Psychology, 105*, 666-682.

Bransford, J. D., & Schwartz, D. L. (Eds.). (1999). *Rethinking transfer: A simple proposal with multiple implications* (Vol. 24). Washington, DC: American Educational Research Association.

Bruner, J. S. (1966). Toward a theory of instruction. Cambridge, MA: Belknap Press.

Cai, J., & Knuth, E. (Eds.). (2011). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives*. Springer Science & Business Media.

Campbell, J. I., & Graham, D. J. (1985). Mental multiplication skill: Structure, process, and acquisition. *Canadian Journal of Psychology, 39*, 338-366.

Carpenter, T. P., Franke, M. L.,Jacobs, V. R., Fennema, E., & Empson, S. B. (1998). A longitudinal study of invention and understanding in children's multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*, 3-20.

Ching, B. H. H., & Wu, X. (2019). Concreteness fading fosters children's understanding of the inversion concept in addition and subtraction. *Learning and Instruction, 61*, 148-159.

Cooney, J. B., Swanson, H. L.,& Ladd, S. F. (1988). Acquisition of mental multiplication skill: Evidence for the transition between counting and retrieval strategies. *Cognition and Instruction, 5*, 323–345.

Davis, B., & Simmt, E. (2006). Mathematics-for-teaching: An ongoing investigation of the mathematics thatteachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 293-319.

Fuchs, L. S., Geary, D. C., Fuchs, D., Compton, D. L., & Hamlett, C. L. (2014). Sources of individual differences in emerging competence with numeration understanding versus multidigit calculation skill. *Journal of Educational Psychology, 106*, 482-498.

Fyfe, E. R., McNeil, N. M., & Borjas, S. (2015). Benefits of “concreteness fading” for children's mathematicsunderstanding. *Learning and Instruction, 35*, 104–120.

Fyfe, E. R., McNeil, N. M., Son, J. Y., & Goldstone, R. L. (2014). Concreteness fading in mathematics and science instruction: A systematic review. *Educational Psychology Review, 26*, 9-25.

Fyfe, E. R., & Nathan, M. J. (2019). Making “concreteness fading” more concrete as a theory of instruction for promoting transfer. *Educational Review, 71*, 403-422.

Goldstone, R. L., & Son, J. Y. (2005). The transfer of scientific principles using concrete and idealized simulations. *The Journal of the Learning Sciences, 14*, 69-110.

Groen, G. J., & Parkman, J. M.(1972). A chronometric analysis of simple addition. *Psychological Review, 79*, 329–343.

Herscovics, N., & Linchevski,L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics, 27*, 59-78.

Hickendorff, M., Torbeyns, J. & Verschaffel, L.(2019). Multi-digit addition, subtraction, multiplication, and division strategies. In: Fritz A., Haase V., Räsänen P. (Eds) *International Handbook of Mathematical Learning Difficulties*(pp. 543-560). Springer, Cham.

Johnson, A. M., Reisslein, J., & Reisslein, M. (2014). Representation sequencing in computer-based engineering education. *Computers & Education, 72*, 249-261.

Jordan, N. C., Kaplan, D., Ramineni, C., & Locuniak, M. N. (2009). Early math matters: Kindergarten number competence and later mathematics outcomes. *Developmental Psychology, 45*, 850-867.

Kaminski, J. A., Sloutsky, V. M., & Heckler, A. F. (2008). The advantage of abstract examples in learning math. *Science, 320*, 454-455.

Kaminski, J. A., Sloutsky, V. M., & Heckler, A. (2009). Transfer of mathematical knowledge: The portability of generic instantiations. *Child Development Perspectives, 3*, 151-155.

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, D.C.: National Academy Press.

Lee, J. E. (2014). Deciphering multiplication algorithms with the area model. *Mathematics Teaching in the Middle School, 19*, 556-563.

LeFevre, J. A., Bisanz, J., Daley, K. E., Buffone, L., Greenham, S. L., & Sadesky, G. S. (1996). Multiple routes to solution of single-digit multiplication problems. *Journal of Experimental Psychology: General, 125*, 284-306.

Lemaire, P., & Callies, S. (2009). Children’s strategies in complex arithmetic. *Journal of Experimental Child Psychology, 103*, 49-65.

Linchevski, L., & Herscovics, N. (1996). Crossing the cognitive gap between arithmetic and algebra:

Operatingon the unknown in the context of equations. *Educational Studies in Mathematics, 30*, 39-65.

Liu, R. D., Ding, Y., Gao, B. C.,& Zhang, D. (2015). The relations between number property strategies, working memory, and multiplication in elementary students. *The Journal of Experimental Education, 83*, 319–343.

McNeil, N. M., & Fyfe, E. R. (2012). "Concreteness fading" promotes transfer of mathematical knowledge. *Learning and Instruction, 22*, 440-448.

McNeil, N. M., Uttal, D. H., Jarvin, L., & Sternberg, R. J. (2009). Should you show me the money? Concrete objects both hurt and help performance on mathematics problems. *Learning and Instruction, 19*, 171-184.

Nathan, M. J. (2012). Rethinking formalisms in formal education. *Educational Psychologist, 47*, 125-148.

National Council of Teachers of Mathematics (2006). *Curriculum focal points for prekindergarten through grade 8 mathematics*. Reston, VA: Author.

Ottmar, E., & Landy, D. (2017). Concreteness fading of algebraic instruction: Effects on learning. *Journal of the Learning Sciences, 26*, 51-78.

Passolunghi, M. C., & Siegel, L. S. (2001). Short-term memory, working memory, and inhibitory control in children with difficulties in arithmetic problem solving. *Journal of Experimental Child Psychology, 80*, 44-57.

Prather, R. W., & Alibali, M. W. (2009). The development of arithmetic principle knowledge: How do we know what learners know? *Developmental Review, 29*, 221–248.

Schwartz, D. L., & Bransford, J. D. (1998). A time for telling. *Cognition and Instruction, 16*, 475–523.

Sherman, M. F., Walkington, C., & Howell, E. (2016). A comparison of symbol-precedence view in investigative and conventional textbooks used in algebra courses. *Journal for Research in Mathematics Education, 47*, 134-146.

Sweller, J., & Cooper, G. A. (1985). The use of worked examples as a substitute for problem solving in learning algebra. *Cognition and Instruction, 2*, 59-89.

Uttal, D. H., Scudder, K. V., & DeLoache, J. S. (1997). Manipulatives as symbols: A new perspective on the use of concrete objects to teach mathematics. *Journal of Applied Developmental Psychology, 18*, 37-54.

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education, 24*, 335–359.

Witzel, B. S., Mercer, C. D., & Miller, M. D. (2003). Teaching algebra to students with learning difficulties: An investigation of an explicit instruction model. *Learning Disabilities Research & Practice, 18*, 121-131.

Combining of Concrete and Abstract Instruction for Teaching Strategies for Solving Two-digit Multiplication Problems

Im, Soo-hyun (Postdoctoral Researcher, Teachers College, Columbia University)

People solve multi-digit arithmetic problems using a combination of routine calculation procedures and adaptive strategies. An important adaptive strategy for multi-digit multiplication is decomposition via the distributive law, e.g., $12 \times 17 = 12 \times (10 + 7) = 120 + 84 = 204$. The current study investigated the combining of concrete and abstract instruction for teaching the distributive law. To achieve the goal of the study, we recruited third graders from two elementary schools in Seoul. Participated third graders were randomly assigned to one of the four instructional conditions. They completed concrete instruction (either arithmetic or area) and abstract instruction (algebra) in one of two orders: concreteness fading (either arithmetic-algebra or area-algebra) or abstraction instantiation (either algebra-arithmetic or algebra-area). Results found that there was no effect of instructional sequence on performance on the target 2D × 2D multiplication problems at posttest. However, there was greater performance on the target 2D × 2D multiplication problems at posttest for concrete instruction that was arithmetic-based versus area-based. Transfer to multiplication problems of broader ranges and different (i.e., algebraic) formats was comparable for all instructional conditions. Finally, individual differences in addition and subtraction fact fluency predicted performance on the target 2D × 2D multiplication problems at posttest. The implications of these findings for theories of learning instruction and for future research on arithmetic strategies are discussed.

* Key words : Multiplication Instruction, Distributive Law, Concreteness Fading, Abstraction Instantiation

논문접수 : 2020. 02. 17.
논문심사 : 2020. 02. 19.
게재승인 : 2020. 03. 07.